



# · 全心全意 品质为真 ·

服务热线：4000-555-100

## CONTENTS

小题阶段自查（一）	预备知识
小题阶段自查（二）	函数的概念与性质
小题阶段自查（三）	函数
小题阶段自查（四）	导数及其应用
解答专题特训（一）	函数与导数
小题阶段自查（五）	三角函数
解答专题特训（二）	解三角形
小题阶段自查（六）	平面向量与复数
小题阶段自查（七）	数列
解答专题特训（三）	数列
小题阶段自查（八）	立体几何
解答专题特训（四）	立体几何
小题阶段自查（九）	直线与圆
小题阶段自查（十）	圆锥曲线
解答专题特训（五）	解析几何
小题阶段自查（十一）	统计、统计案例
小题阶段自查（十二）	计数原理、概率、随机变量及其分布
解答专题特训（六）	统计与概率

增分加练  
**数学**  
RJA

新高考地区



绿色印刷产品

印刷质检码20246700



一、单选题

- [2023·辽宁沈阳二模] 已知集合  $A = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ,  $B = \{x | x > 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$  ( )  
 A.  $\{x | -1 \leq x < 1\}$     B.  $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$   
 C.  $\{x | -1 \leq x < 2\}$     D.  $\{x | x < 2\}$
- [2024·重庆七校联考] 命题“ $\exists a \in [0, 1]$ ,  $a^4 + a^2 > 1$ ”的否定是 ( )  
 A.  $\exists a \in [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$   
 B.  $\forall a \notin [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$   
 C.  $\exists a \notin [0, 1], a^4 + a^2 > 1$   
 D.  $\forall a \in [0, 1], a^4 + a^2 \leq 1$
- [2021·全国乙卷] 已知集合  $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $S \cap T =$  ( )  
 A.  $\emptyset$     B.  $S$     C.  $T$     D.  $\mathbb{Z}$
- [2023·浙江镇海中学模拟] 已知  $x \in \mathbb{R}$ , 则“ $x > 0$ ”是“ $2^x < 3^x$ ”的 ( )  
 A. 充分不必要条件  
 B. 必要不充分条件  
 C. 充要条件  
 D. 既不充分也不必要条件
- [2023·山西朔州模拟] 函数  $y = 3x + \frac{4}{3x-1} (x > \frac{1}{3})$  的最小值为 ( )  
 A. 8    B. 7    C. 6    D. 5
- [2023·湖南师大附中模拟] 快递公司计划在某货运枢纽附近投资配建货物分拣中心. 假定每月的土地租金成本与分拣中心到货运枢纽的距离成反比, 每月的货物运输成本与分拣中心到货运枢纽的距离成正比. 经测算, 如果在距离货运枢纽 10 km 处配建分拣中心, 则每月的土地租金成本和货物运输成本分别为 2 万元和 8 万元. 要使得两项成本之和最小, 分拣中心到货运枢纽的距离应设置为 ( )  
 A. 5 km    B. 6 km  
 C. 7 km    D. 8 km
- [2023·重庆南开中学月考] 若命题“ $\exists x \in [1, 2], 2^x + x - a \leq 0$ ”为真命题, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )  
 A.  $(-\infty, 5]$     B.  $[6, +\infty)$   
 C.  $(-\infty, 3]$     D.  $[3, +\infty)$

- [2023·重庆巴蜀中学月考] 已知正实数  $a, b$  满足  $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{b+1} = 1$ , 则  $a+2b$  的最小值为 ( )  
 A. 6    B. 8  
 C. 10    D. 12

二、多选题

- [2023·山东潍坊二模] 已知实数  $a > b > 0$ , 则 ( )  
 A.  $\frac{b}{a} < \frac{b+2}{a+2}$   
 B.  $a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$   
 C.  $a^b > b^a$   
 D.  $\lg \frac{a+b}{2} > \frac{\lg a + \lg b}{2}$
- [2023·诸暨模拟] “直线  $l: y = kx + b$  和圆  $O: x^2 + y^2 = 2$  有公共点”的一个充分不必要条件是 ( )  
 A.  $b = 1$     B.  $k = 1$   
 C.  $b^2 - k^2 \leq 1$     D.  $b^2 - 2k^2 \leq 2$
- [2022·新高考全国 II 卷] 若实数  $x, y$  满足  $x^2 + y^2 - xy = 1$ , 则 ( )  
 A.  $x + y < 1$     B.  $x + y \geq -2$   
 C.  $x^2 + y^2 \geq 1$     D.  $x^2 + y^2 \leq 2$

三、填空题

- [2023·甘肃武威十八中一诊] 已知集合  $\left\{1, a, \frac{b}{a}\right\} = \{0, a^2, a+b\}$ , 则  $a^{2024} + b^{2023} =$  \_\_\_\_\_.
- [2023·云南昆明一中模拟] 某班一个课外调查小组调查了该班同学对物理和历史两门学科的兴趣爱好情况, 其中对物理或历史感兴趣的的同学占 90%, 对物理感兴趣的同学占 56%, 对历史感兴趣的同学占 74%, 则既对物理感兴趣又对历史感兴趣的同学占该班同学总数的比例是 \_\_\_\_\_.
- [2024·九省联考] 以  $\max M$  表示数集  $M$  中最大的数, 设  $0 < a < b < c < 1$ , 已知  $b \geq 2a$  或  $a + b \leq 1$ , 则  $\max\{b-a, c-b, 1-c\}$  的最小值为 \_\_\_\_\_.



班级

姓名

答题卡

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

一、单选题

- [2024·广州中山大学附中模拟] 函数  $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x} - \log_2 x$  的定义域为 ( )  
A.  $(0, 2]$  B.  $(-\infty, 2)$   
C.  $(-\infty, 0) \cup (0, 2]$  D.  $[2, +\infty)$
- [2023·全国乙卷] 已知  $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax}-1}$  是偶函数, 则  $a =$  ( )  
A.  $-2$  B.  $-1$  C.  $1$  D.  $2$
- [2023·北京卷] 下列函数中, 在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增的是 ( )  
A.  $f(x) = -\ln x$  B.  $f(x) = \frac{1}{2^x}$   
C.  $f(x) = -\frac{1}{x}$  D.  $f(x) = 3^{|x-1|}$
- [2023·浙江临海、新昌二模] 已知函数  $f(x)$  满足  $f(2x) = f(x+1)$ , 则  $f(x)$  的解析式可能是 ( )  
A.  $f(x) = x$  B.  $f(x) = \log_2 x$   
C.  $f(x) = 2^x$  D.  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$
- [2021·全国乙卷] 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 则下列函数中为奇函数的是 ( )  
A.  $f(x-1)-1$  B.  $f(x-1)+1$   
C.  $f(x+1)-1$  D.  $f(x+1)+1$
- [2023·深圳模拟] 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(3+x) = f(1-x)$ , 且  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递减, 则  $f(1), f(2)$  与  $f(4)$  的大小关系是 ( )  
A.  $f(4) < f(1) < f(2)$   
B.  $f(2) < f(1) < f(4)$   
C.  $f(1) < f(2) < f(4)$   
D.  $f(4) < f(2) < f(1)$
- [2023·石家庄部分学校联考] 已知函数  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的单调函数, 且  $f[f(x)-x-\log_2 x] = 5$ , 则  $f(x)$  在  $[1, 8]$  上的取值范围为 ( )  
A.  $[2, 10]$  B.  $[3, 10]$   
C.  $[2, 13]$  D.  $[3, 13]$
- [2023·广东惠州一模] 若函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 对于  $D$  中的任意一个  $x$ , 都有  $f(x) > 0$ ,  $-x \in D$ , 且  $f(-x)f(x) = 1$ , 则称函数  $f(x)$  为“类奇函数”. 若某函数  $g(x)$  是“类奇函数”, 则下列说法中错误的是 ( )

- 若  $0$  在  $g(x)$  的定义域中, 则  $g(0) = 1$
- 若  $g(x)_{\max} = g(4) = 4$ , 则  $g(x)_{\min} = g(-4) = \frac{1}{4}$
- 若  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 则  $g(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减
- 若  $g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且函数  $h(x)$  也是定义域为  $\mathbf{R}$  的“类奇函数”, 则函数  $G(x) = g(x)h(x)$  也是“类奇函数”

二、多选题

- [2023·广州华南师大附中月考] 已知  $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ , 若  $f[f(a)] = 1$ , 则实数  $a$  的值可以为 ( )  
A.  $\frac{1-e}{2}$  B.  $\frac{1}{2}$  C.  $1$  D.  $e^e$
- [2024·浙江名校联盟模拟] 已知定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(1) = 1$  且  $f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y)$ , 则 ( )  
A.  $f(0) = 2$  B.  $f(2) = 0$   
C.  $f(x)$  为偶函数 D.  $f(x)$  为周期函数
- [2023·C9 联盟模拟] 欧拉函数  $\varphi(n)$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ) 的函数值等于所有不超过  $n$ , 且与  $n$  互素 (两个数的最大公约数为 1) 的正整数的个数, 例如  $\varphi(1) = 1, \varphi(4) = 2$ . 欧拉函数具有以下性质: 如果  $m, n$  是互素的正整数, 那么  $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ . 下列说法中正确的是 ( )  
A.  $\varphi(40) = 16$   
B. 若  $n$  为素数, 则  $\varphi(n) = n-1$   
C. 若  $n$  为奇数, 则  $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$   
D. 若  $n \in \mathbf{N}_+$ , 则  $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$

三、填空题

- [2024·丹东模拟] 若  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 函数  $f(x)$  满足  $f(\sin x) + 2f(\cos x) = \cos 2x$ , 则  $f(\frac{1}{2}) =$  \_\_\_\_\_.
- [2023·湖南娄底四模] 已知函数  $f(x)$  满足以下条件: ①在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增; ②对任意  $x_1, x_2$ , 均有  $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) - 1$ . 则  $f(x)$  的一个解析式为 \_\_\_\_\_.
- [2024·广东六校联考] 已知函数  $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} + ex + 2$ , 且满足  $f(m^2) + f(m-2) > 4$ , 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



一、单选题

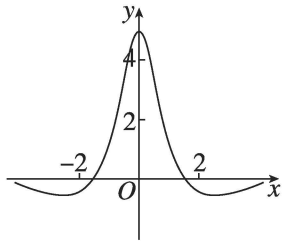
1. [2023·天津卷] 函数  $f(x)$  的部分图象如图所示, 则  $f(x)$  的解析式可能为 ( )

A.  $f(x) = \frac{5(e^x - e^{-x})}{x^2 + 2}$

B.  $f(x) = \frac{5\sin x}{x^2 + 1}$

C.  $f(x) = \frac{5(e^x + e^{-x})}{x^2 + 2}$

D.  $f(x) = \frac{5\cos x}{x^2 + 1}$



2. [2022·浙江卷] 已知  $2^a = 5$ ,  $\log_8 3 = b$ , 则  $4^{a-3b} =$  ( )

- A. 25      B. 5      C.  $\frac{25}{9}$       D.  $\frac{5}{3}$

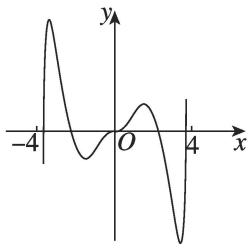
3. [2024·江苏镇江模拟] 设  $a = 2\log_3 2$ ,  $b = \log_2 3$ ,  $c = \frac{4}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a > b > c$       B.  $c > b > a$   
C.  $a > c > b$       D.  $b > c > a$

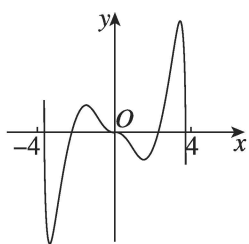
4. [2023·杭州、宁波部分学校联考] 已知函数  $f(x) = e^{2x} + e^{-2x+2}$ , 则 ( )

- A.  $f(x+1)$  为奇函数  
B.  $f(x + \frac{1}{2})$  为偶函数  
C.  $f(x-1)$  为奇函数  
D.  $f(x - \frac{1}{2})$  为偶函数

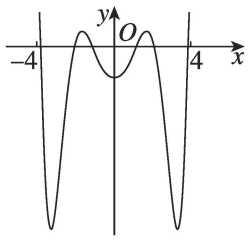
5. [2023·山东淄博模拟] 函数  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{3} \cdot \cos 2x$  在  $[-4, 4]$  上的图象大致是 ( )



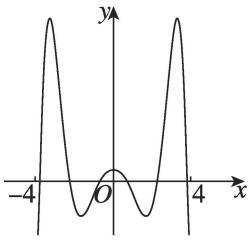
A



B



C



D

6. [2024·辽宁朝阳联考] 某银行拟在乡村开展小额贷款业务, 根据调查的数据, 建立了实际还款比例  $P(x)$  关于还款人的年收入  $x$  (单位: 万元)

的模型:  $P(x) = \frac{e^{-0.9+kx}}{1+e^{-0.9+kx}}$ . 已知当贷款人的年收入为 9 万元时, 其实际还款比例为 50%, 若贷款人的年收入约为 5 万元, 则实际还款比例约为

(参考数据:  $e^{-0.4} \approx \frac{2}{3}$ ) ( )

- A. 30%      B. 40%  
C. 60%      D. 70%

7. [2023·湖北七市州模拟] 已知函数  $f(x) = \log_3(3^{x-1} + 3) - \frac{1}{2}x$ , 若  $f(a-1) \geq f(2a+1)$  成立, 则实数  $a$  的取值范围为 ( )

- A.  $(-\infty, -2]$   
B.  $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$   
C.  $[-2, \frac{4}{3}]$   
D.  $(-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$

8. [2024·山东德州模拟] 定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数  $f(x)$  满足  $f(2-x) = f(x+2)$ , 当  $x \in [0, 2]$

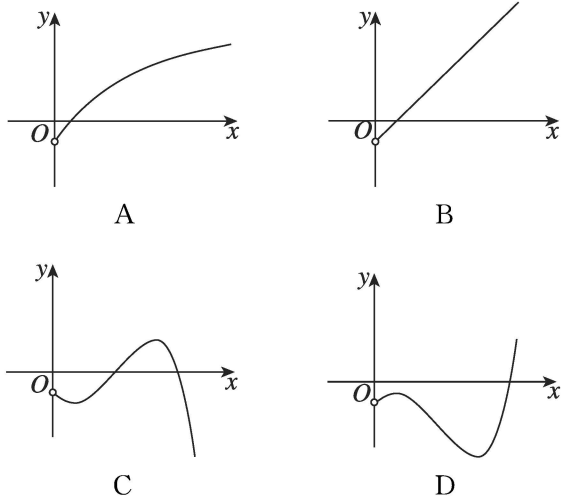
时,  $f(x) = (\sqrt{e})^x$ , 若在区间  $[0, 10]$  内, 函数  $g(x) = f(x) - mx - 1 (m > 0)$  有 5 个零点, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $[\frac{e-1}{10}, \frac{e-1}{6})$       B.  $(0, \frac{e^5-1}{10})$   
C.  $(\frac{e-1}{11}, \frac{e-1}{6})$       D.  $(0, \frac{e-1}{10}]$



二、多选题

9. [2023·合肥一模] 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = x^a - a^x (x > 0)$  的图象可能是 ( )



10. [2023·新课标 I 卷] 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级  $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$ , 其中常数  $p_0 (p_0 > 0)$  是听觉下限阈值,  $p$  是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为  $p_1, p_2, p_3$ , 则 ( )

- A.  $p_1 \geq p_2$                       B.  $p_2 > 10p_3$   
 C.  $p_3 = 100p_0$                     D.  $p_1 \leq 100p_2$

11. [2023·烟台一模] 已知  $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$ , 若直线  $x = k (k > 0)$  与  $f(x), g(x)$  的图象交点的纵坐标分别为  $n, m$ , 且  $n < 2m$ , 则 ( )

- A.  $n + m < \frac{3\sqrt{2}}{2}$   
 B.  $n - m < \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 C.  $n^n > (m+1)^{m+1}$   
 D.  $n^{m+1} < (m+1)^n$

三、填空题

12. [2023·上海卷] 已知函数  $f(x) = 2^{-x} + 1$ , 且  $g(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 0, \\ f(-x), & x < 0, \end{cases}$  则方程  $g(x) = 2$  的解为 \_\_\_\_\_.

13. [2023·深圳五校联考] 若函数  $f(x) = |\ln(x+2) - 2| - t$  有两个零点  $a$  和  $b$ , 则  $a + b$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

14. [2023·淮北一模] 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0, \\ e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$  若互不相等的实数  $x_1, x_2, x_3$  满足  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$ , 则  $x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3)$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.



一、单选题

1. [2024·南通模拟] 已知  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数,  $f(x) = \sin x + 2xf'(0)$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$   
C.  $-1$                         D.  $1$

2. [2023·全国甲卷] 曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(1, \frac{e}{2})$  处的切线方程为 ( )

- A.  $y = \frac{e}{4}x$                       B.  $y = \frac{e}{2}x$   
C.  $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$                       D.  $y = \frac{e}{2}x + \frac{3e}{4}$

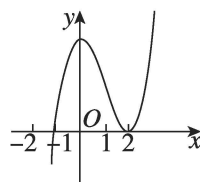
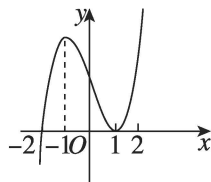
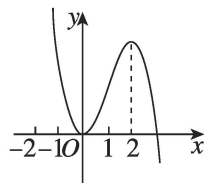
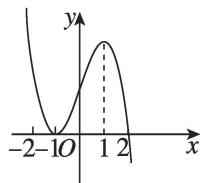
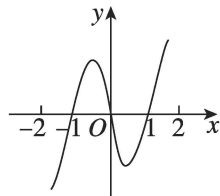
3. [2023·昆明模拟] 已知函数  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  的导函数为  $f'(x)$ , 且  $f(x)$  满足  $f(x) - f(2-x) = 0$ , 则下列结论一定正确的是 ( )

- A. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 1)$  对称  
B. 函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称  
C. 函数  $f'(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称  
D. 函数  $f'(x)$  的图象关于点  $(1, 0)$  对称

4. [2024·合肥一中月考] 已知函数  $f(x) = x(x-3)(x-3^2)(x-3^3)(x-3^4)(x-3^5)$ , 则  $f'(0) =$  ( )

- A.  $3^{15}$                               B.  $3^{14}$   
C.  $-3^{14}$                               D.  $-3^{15}$

5. [2023·石家庄二模] 已知函数  $y = xf'(x)$  的图象如图所示(其中  $f'(x)$  是函数  $f(x)$  的导函数), 下面四个图象中可能是  $y = f(x)$  图象的是 ( )



6. [2023·全国乙卷] 函数  $f(x) = x^3 + ax + 2$  存在 3 个零点, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, -2)$                       B.  $(-\infty, -3)$   
C.  $(-4, -1)$                         D.  $(-3, 0)$

7. [2023·邯郸二模] 设  $a = \ln 5 - \ln 3, b = \frac{2}{5}e^{\frac{2}{3}}, c = \frac{2}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $b > c > a$                         B.  $a > b > c$   
C.  $a > c > b$                         D.  $c > a > b$

班级

姓名

答题卡

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

8. [2024·重庆七校联考] 若正数  $x, y$  满足  $y \ln x + y \ln y = e^x$ , 则  $x \cdot (y-2)$  的最小值为 ( )

- A.  $2-2\ln 2$                       B.  $2+2\ln 2$   
C.  $\frac{1}{2}\ln 2$                          D.  $-\frac{1}{2}\ln 2$

## 二、多选题

9. [2023·威海期末] 下列求导运算正确的是 ( )

- A.  $(\cos x)' = \sin x$   
B.  $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   
C.  $(2^{x+1})' = (x+1)2^x$   
D.  $(e^{2x})' = 2e^{2x}$

10. [2022·新高考全国 I 卷] 已知函数  $f(x) = x^3 - x + 1$ , 则 ( )

- A.  $f(x)$  有两个极值点  
B.  $f(x)$  有三个零点  
C. 点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心  
D. 直线  $y = 2x$  是曲线  $y = f(x)$  的切线

11. [2023·马鞍山三模] 已知函数  $f(x) = (x^2 + x)e^x + \ln x$  的零点为  $x_0$ , 则下列判断正确的是 ( )

- A.  $x_0 < \frac{1}{2}$   
B.  $x_0 > \frac{1}{e}$   
C.  $e^{x_0} + \ln x_0 < 0$   
D.  $x_0 + \ln x_0 < 0$

## 三、填空题

12. [2024·黑龙江双鸭山一中模拟] 若曲线  $y = ax^2 + \ln x$  ( $a$  为常数) 在点  $(1, a)$  处的切线与直线  $y = 2x$  平行, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

13. [2023·石家庄模拟] 若直线  $y = kx + b$  是曲线  $y = \frac{\ln x}{x}$  的切线, 也是曲线  $y = \frac{2}{x}$  的切线, 则  $k =$  \_\_\_\_\_.

14. [2023·全国乙卷] 设  $a \in (0, 1)$ , 若函数  $f(x) = a^x + (1+a)^x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.





**解答题**(本大题共 6 小题,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

1. [2024·江苏南京模拟] 已知函数  $f(x) = x^2 + 2x - a \ln(x+1)$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

- (1) 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 若  $f(x) > -1 - e^2$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

2. [2023·福州二模] 已知函数  $f(x) = (x+1) \cdot \ln x - ax + a$ .

- (1) 若  $a = 2$ , 试判断  $f(x)$  的单调性.
- (2) 若当  $x > 1$  时,  $f(x) > 0$  恒成立.
  - ① 求  $a$  的取值范围;
  - ② 设  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ),  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 求  $[10a_n]$ . (参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69$ )

3. [2023·安徽铜陵三模] 已知函数  $f(x) = e^x - ax$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

- (1) 试讨论函数  $f(x)$  的极值;
- (2) 若存在实数  $x > 0$ , 使得  $xe^{bx} - e^x + (b-1)x^2 + x \ln x \geq 0$  成立, 求实数  $b$  的取值范围.

4. [2023·广州一模] 已知  $a > 0$ , 函数  $f(x) = (1-ax)(e^x - 1)$ .

(1) 若  $a=1$ , 证明: 当  $x > 0$  时,  $f(x) < \ln(x+1)$ ;

(2) 若函数  $h(x) = \ln(x+1) - f(x)$  存在极小值点  $x_0$ , 证明:  $f(x_0) \geq 0$ .

5. [2023·全国甲卷] 已知  $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ ,

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

(1) 当  $a=8$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x) < \sin 2x$ , 求  $a$  的取值范围.

6. [2022·新高考全国 I 卷] 已知函数  $f(x) = e^x - ax$  和  $g(x) = ax - \ln x$  有相同的最小值.

(1) 求  $a$ ;

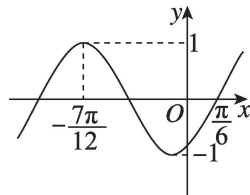
(2) 证明: 存在直线  $y = b$ , 其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.



一、单选题

1. [2023·全国甲卷] 设甲:  $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ , 乙:  $\sin\alpha + \cos\beta = 0$ , 则 ( )
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件  
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件  
C. 甲是乙的充要条件  
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
2. [2022·浙江卷] 为了得到函数  $y = 2\sin 3x$  的图象, 只要把函数  $y = 2\sin(3x + \frac{\pi}{5})$  图象上所有的点 ( )
- A. 向左平移  $\frac{\pi}{5}$  个单位长度  
B. 向右平移  $\frac{\pi}{5}$  个单位长度  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{15}$  个单位长度  
D. 向右平移  $\frac{\pi}{15}$  个单位长度
3. [2023·新课标 II 卷] 已知  $\alpha$  为锐角,  $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ , 则  $\sin\frac{\alpha}{2} =$  ( )
- A.  $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$                       B.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$   
C.  $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$                         D.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$
4. [2023·泉州模拟] 已知  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且满足  $\tan\alpha \tan(\beta + \frac{\pi}{4}) = 1$ , 则 ( )
- A.  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$                       B.  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$   
C.  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$                       D.  $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

5. [2023·江苏南京模拟] 已知函数  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| <$



- $\frac{\pi}{2}$ ), 将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{3\pi}{4}$  个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象,  $g(x)$  的部分图象如图所示, 则  $g(\frac{\pi}{3}) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
C.  $-\frac{1}{2}$                                     D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. [2023·全国乙卷] 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$  在区间  $(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$  单调递增, 直线  $x = \frac{\pi}{6}$  和  $x = \frac{2\pi}{3}$  为函数  $y = f(x)$  的图象的两条对称轴, 则  $f(-\frac{5\pi}{12}) =$  ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                                   B.  $-\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}$                                         D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. [2024·九省联考] 已知  $\theta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ ,  $\tan 2\theta = -4\tan(\theta + \frac{\pi}{4})$ , 则  $\frac{1 + \sin 2\theta}{2\cos^2\theta + \sin 2\theta} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{4}$                                         B.  $\frac{3}{4}$   
C. 1                                         D.  $\frac{3}{2}$

8. [2023·全国甲卷] 函数  $y=f(x)$  的图象由函数  $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得到, 则  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$  的交点个数为 ( )

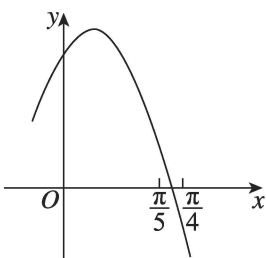
- A. 1  
B. 2  
C. 3  
D. 4

二、多选题

9. [2023·金华一中模拟] 已知  $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$ ,  $\theta\in(0,\pi)$ , 则 ( )

- A.  $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$   
B.  $\sin\theta-\cos\theta=\frac{12}{25}$   
C.  $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$   
D.  $\tan\theta=-\frac{4}{3}$

10. [2023·无锡三模] 已知函数  $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega>0$ ) 的部分图象如图所示, 则 ( )



- A.  $\omega\in\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$   
B.  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{16}\right]$  上单调递增  
C.  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  上有且仅有 2 个极小值点  
D.  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$  上有且仅有 2 个极大值点

11. [2023·泰安模拟] 定义  $1-\cos\theta$  为角  $\theta$  的正矢, 记作  $\text{versin}\theta$ ; 定义  $1-\sin\theta$  为角  $\theta$  的余矢, 记作  $\text{coversin}\theta$ . 定义:  $\lambda = \frac{\sin^2(\theta_1-\theta_0)+\sin^2(\theta_2-\theta_0)+\dots+\sin^2(\theta_n-\theta_0)}{n}$

为一组数据  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  相对于常数  $\theta_0$  的“正弦方差”. 若  $\theta\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 一组数据  $0, \frac{\pi}{3}$  相对于  $\theta$  的“正弦方差”为  $\lambda_0$ , 则  $y=1+\sqrt{3}-\sqrt{3}\text{versin}(\lambda_0\pi)-\text{coversin}(\lambda_0\pi)$  的值可能是 ( )

- A.  $-\sqrt{2}$   
B.  $\sqrt{2}$   
C.  $\sqrt{3}$   
D.  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

三、填空题

12. [2023·安阳一模] 敲击一次音叉 A 所发出的声波可用函数  $y_1=\frac{1}{1000}\sin(400\pi\cdot t)$  描述, 敲击一次音叉 B 所发出的声波可用函数  $y_2=\frac{3}{1250}\sin(360\pi\cdot t)$  描述, 则敲击两个音叉所发出的声音的响度较大的是\_\_\_\_\_. (填“A”或“B”)

13. [2023·珠海一中月考]  $\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}=\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. [2023·南通三模] 将函数  $f(x)=2\sin(3x+\varphi)$  ( $|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}$ ) 的图象向右平移  $\frac{2\pi}{9}$  个单位长度, 得到的函数  $g(x)$  的图象关于点  $\left(-\frac{11}{18}\pi, 0\right)$  对称, 且  $g(x)$  在区间  $\left(\frac{\varphi}{m}, -\frac{\varphi}{m}\right)$  上单调递增, 则  $\varphi=\underline{\hspace{2cm}}$ , 实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.